Curs 5 - Suma a două subspații liniare

Oana Constantinescu, Lucian Maticiuc

Cadrul de lucru al acestui curs este un spațiu liniar V de dimensiune finită n.

Am văzut că intersecția unor subspații liniare ale lui V este întotdeauna un subspațiu liniar al lui V. Oare acest lucru este valabil și pentru reuniunea unor subspații liniare?

Observăm rapid că $U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ și $U_2 = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sunt subspații liniare ale lui $\mathbb{R}^2$ (verificați!). Dar $(1, 0), (0, 1) \in U_1 \cup U_2$ și $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U_1 \cup U_2$.

Deci există situații în care reuniunea a două subspații liniare nu este un subspațiu liniar. Este firesc să considerăm atunci cel mai mic subspațiu liniar al lui V care conține $U_1 \cup U_2$. Acesta este subspațiul liniar generat de $U_1 \cup U_2$, adică mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite de elemente din $U_1 \cup U_2$.

Definiţia 1 *Suma subspațiilor liniare U_1 și U_2 ale lui V este subspațiul liniar generat de $U_1 \cup U_2$. Notăm prin*
$$U_1 + U_2 = [U_1 \cup U_2] .$$

Propoziţia 2 *Fie $U_1, U_2 \underset{s.l.}{\subset} V$. Atunci $U_1+U_2 = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \exists \overrightarrow{v}_1 \in U_1,\, \exists \overrightarrow{v}_2 \in U_2 \; a.i.\; \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2\}$.*

Demonstrație

Notăm cu $W = \{\overrightarrow{v} \in V \mid \exists \overrightarrow{v}_1 \in U_1,\, \exists \overrightarrow{v}_2 \in U_2 \; a.i.\; \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2\}$. Deoarece orice vector al lui W este o combinație liniară de vectori din $U_1 \cup U_2$, rezultă că orice vector al lui W aparține sumei celor două subspații liniare. Deci $W \subset U_1 + U_2$.

Considerăm acum un vector arbitrar $\overrightarrow{u} \in U_1+U_2 = [U_1 \cup U_2] \Rightarrow \exists \overrightarrow{a}_1, \cdots \overrightarrow{a}_k \in U_1, \exists \overrightarrow{b}_1, \cdots \overrightarrow{b}_p \in U_2$, $\exists \alpha^i, \beta^j \in K, i \in \overline{1,k}, j \in \overline{1,p}$ a.i $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{a}_i + \sum_{j=1}^p \beta^j \overrightarrow{b}_j$. Dar $U_1, U_2 \underset{s.l.}{\subset} V$, deci $\sum_{i=1}^k \alpha^i \overrightarrow{a}_i \in U_1$ și $\sum_{j=1}^p \beta^j \overrightarrow{b}_j \in U_2$. Rezultă $\overrightarrow{u} \in W$, deci $U_1 + U_2 \subset W$.

Bineînțeles că putem generaliza definiția și rezultatul anterior.

Definim suma subspațiilor liniare U_i ale lui V, $i \in \overline{1,k}$ ca fiind subspațiul liniar generat de $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$. Se demonstrează analog că
$$U_1 + U_2 + \cdots + U_k = \left\{\overrightarrow{v} \in V \mid \exists \overrightarrow{v}_i \in U_i, i \in \overline{1,k},\ a.i.\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \cdots \overrightarrow{v}_k\right\}.$$

Se poate întâmpla ca scrierea unui vector din $U_1 + U_2$ ca suma dintre un vector din U_1 și un vector din U_2 să nu fie unică. Să dăm un exemplu.

Fie $W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, $W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ două subspații liniare ale lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Fie $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in W_1$, $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$. Observăm că $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A_1 + B_1 = A_2 + B_2$.

Definiţia 3 *Suma $U_1 + U_2$ se numește sumă directă de cele două subspații dacă orice $\overrightarrow{v} \in U_1 + U_2$ se scrie în mod unic ca $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$, cu $\overrightarrow{v}_1 \in U_1,\ \overrightarrow{v}_2 \in U_2$. Notăm suma directă prin $U_1 \oplus U_2$.*

Două subspații liniare U_1, U_2 ale lui V se numesc suplimentare dacă suma lor directă coincide cu spațiul liniar ambiant: $U_1 \oplus U_2 = V$.

Propoziţia 4 *Fie $U_1, U_2 \underset{s.l.}{\subset} V$. Atunci suma $U_1 + U_2$ este directă $\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.*

Implicația directă

Presupunem că suma $U_1 + U_2$ este directă. Deci orice vector $\overrightarrow{v} \in U_1 \oplus U_2$ se scrie în mod unic ca $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$, cu $\overrightarrow{v}_1 \in U_1,\ \overrightarrow{v}_2 \in U_2$.

Fie $\overrightarrow{v} \in U_1 \cap U_2$ arbitrar. Atunci $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v} \in U_1$, $\overrightarrow{0} \in U_2$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{0} \in U_1$, $\overrightarrow{v} \in U_2$. Deci $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \forall \overrightarrow{v} \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Implicația reciprocă

Presupunem că $U_1 \cap U_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Fie $\overrightarrow{v} \in U_1 + U_2$ a.i. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$, cu $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{u}_1 \in U_1$, $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{u}_2 \in U_2$. Atunci $\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}_2 - \overrightarrow{v}_2 \in U_1 \cap U_2$ (deoarece $U_1, U_2 \underset{s.l.}{\subset} V$, deci diferența a doi vectori din U_i aparține lui U_i, $i = 1, 2$). Dar $U_1 \cap U_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, deci $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{v}_2$, adică scrierea $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$ este unică. Rezultă că suma celor două subspații este directă.

Următoarea propoziție este o generalizare a celei precedente.

Propoziţia 5 *Fie $\{U_i\}_{i \in \overline{1,p}}$ o familie de subspații liniare ale lui V. Atunci suma $U_1 + U_2 + \cdots + U_p$ este directă dacă și numai dacă*

$$\forall k \in \overline{1,n} \Rightarrow U_k \cap \left(\sum_{i=1, i\neq k}^{p} U_i\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}.$$

.

Cum putem determina dimensiunea sumei a două subspații liniare? Vom afla din teorema următoare.

Teorema 6 *(Grassmann) Fie $U_1, U_2 \underset{s.l.}{\subset} V$, cu V un K-spațiu liniar de dimensiune finită. Atunci*

$$dim\left(U_1 + U_2\right) = dimU_1 + dimU_2 - dim\left(U_1 \cap U_2\right). \tag{1}$$

Demonstrație

Presupunem că $U_1 \cap U_2 \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ și că $dimV = n$, $dim\left(U_1 \cap U_2\right) = p$, $0 < p \leq n$, $dimU_1 = m$, $dimU_2 = k$, $p \leq m, k \leq n$.

Fie $B = \{\overrightarrow{e}_1. \cdots, \overrightarrow{e}_p\}$ o bază în $U_1 \cap U_2$, pe care o completăm la o bază

$B' = \left\{\overrightarrow{e}_1. \cdots, \overrightarrow{e}_p, \overrightarrow{f}_{p+1}, \cdots, \overrightarrow{f}_m\right\}$ în U_1, respectiv la o bază $B'' = \{\overrightarrow{e}_1. \cdots, \overrightarrow{e}_p, \overrightarrow{g}_{p+1}, \cdots, \overrightarrow{g}_k\}$ în U_2.

Vom demonstra că $B''' = \left\{\overrightarrow{e}_1. \cdots, \overrightarrow{e}_p, \overrightarrow{f}_{p+1}, \cdots, \overrightarrow{f}_m, \overrightarrow{g}_{p+1}, \cdots, \overrightarrow{g}_k\right\}$ este bază în $U_1 + U_2$, de unde rezultă evident (1).

Fie $\overrightarrow{u} \in U_1 + U_2 \Rightarrow \exists \overrightarrow{u}_1 \in U_1, \exists \overrightarrow{u}_2 \in U_2$ a.i. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$. Deci $\overrightarrow{u}_1 \in [B']$, $\overrightarrow{u}_2 \in [B'']$, deci $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \in [B' \cup B''] = [B''']$. Am demonstrat astfel că B''' este sistem de generatori pentru $U_1 + U_2$. Să demonstrăm că B''' este un sistem de vectori liniar independent.

Fie scalarii $\lambda^i,\ \alpha^j,\ \beta^h \in K,\ i \in \overline{1,p},\ j \in \overline{p+1,m},\ h \in \overline{p+1,k}$ a.i.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda^i \overrightarrow{e}_i + \sum_{j=p+1}^{m} \alpha^j \overrightarrow{f}_j + \sum_{h=p+1}^{k} \beta^h \overrightarrow{g}_h = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda^i \overrightarrow{e}_i + \sum_{j=p+1}^{m} \alpha^j \overrightarrow{f}_j}_{\in U_1} = \underbrace{-\sum_{h=p+1}^{k} \beta^h \overrightarrow{g}_h}_{\in U_2} \Rightarrow$$

$$\sum_{h=p+1}^{k} \beta^h \overrightarrow{g}_h \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists \mu^l \in K,\ l \in \overline{1,p}\ a.i. \sum_{h=p+1}^{k} \beta^h \overrightarrow{g}_h = \sum_{l=1}^{p} \mu^l \overrightarrow{e}_l \Leftrightarrow$$

$$\sum_{h=p+1}^{k} \beta^h \overrightarrow{g}_h - \sum_{l=1}^{p} \mu^l \overrightarrow{e}_l = \overrightarrow{0}.$$

Deoarece B'' este bază a lui U_2, deci sistem de vectori liniar independent, rezultă $\beta^h = 0\, \forall h \in \overline{p+1,k},\ \mu^l = 0\, \forall l \in \overline{1,p}$. Relația (2) devine

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda^i \overrightarrow{e}_i + \sum_{j=p+1}^{m} \alpha^j \overrightarrow{f}_j = \overrightarrow{0}.$$

Folosim din nou că B' este bază a lui U_1,deci sistem de vectori liniar independent, deducem că $\lambda^i = 0\, \forall i \in \overline{1,p},\ \alpha^j = 0,\ \forall j \in \overline{p+1,m}$. Deci toți scalarii din combinația liniară (2) sunt zero, rezultă că B''' este un sistem de vectori liniar independent. Cum este și sistem de generatori pentru $U_1 + U_2$, rezultă că B''' este bază a lui $U_1 + U_2$. Deci $dim\,(U_1 + U_2) = p + m + k = dimU_1 + dimU_2 - dim\,(U_1 \cap U_2)$.
O consecință imediată a acestei teoreme este următoarea propoziție.

Propoziţia 7 *Fie V un K-spațiu liniar de dimensiune finită și $V_1, V_2 \underset{s.l.}{\subset} V$. Atunci suma $V_1 + V_2$ este directă $\Leftrightarrow dim\,(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2$.*

Demonstrație

$dim\,(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2 \Leftrightarrow dim\,(V_1 \cap V_2) = 0 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \Leftrightarrow$ suma suma $V_1 + V_2$ este directă.

Exerciţiul 8 *Fie $V_1 = [\overrightarrow{u}_1 = (1,1,1),\ \overrightarrow{u}_2 = (0,3,1),\ \overrightarrow{u}_3 = (2,-1,1)]$,*
$V_2 = [\overrightarrow{v}_1 = (1,-2,4),\ \overrightarrow{v}_2 = (-2,4,8)]$.
Demonstrați că $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ și determinați descompunerea unică a lui $\overrightarrow{w} = (5,-7,13)$ de forma $\overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2$, cu $\overrightarrow{w}_1 \in V_1,\ \overrightarrow{w}_2 \in V_2$.

Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ și $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ rezultă că $rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, deci $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ e un sistem de vectori liniar independent și $\overrightarrow{u}_3$ depinde liniar de $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ Deoarece $V_1 = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3] = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \alpha\overrightarrow{u}_1 + \beta\overrightarrow{u}_2] = [\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2] \Rightarrow \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ este sistem de generatori pentru V_1. Deci $B_1 = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ este bază a lui V_1 și $dimV_1 = 2$.

Analog, deoarece $rang \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 1$, $\overrightarrow{v}_1 \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{v}_2 = -2\overrightarrow{v}_1 \Rightarrow B_2 = \{\overrightarrow{v}_1\}$ este bază a lui V_2 și $dimV_2 = 1$.

Avem $B_1 \cup B_2$ sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Deoarece $Card\,(B_1 \cup B_2) = 3 = dim\mathbb{R}^3$, deducem că $B_3 = B_1 \cup B_2 = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_1\}$ este bază a lui $V_1 + V_2$, deci $dim\,(V_1 + V_2) = dimV_1 +$

$dimV_2$, deci suma $V_1 + V_2$ este directă. Mai mult, $V_1 + V_2$ este subspațiu liniar trei dimensional al lui $\mathbb{R}^3$, deci coincide cu $\mathbb{R}^3$. Astfel am demonstrat $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$.

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a.i. $\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u}_1 + \beta \overrightarrow{u}_2 + \gamma \overrightarrow{v}_1$. Înlocuind vectorii în această relație obținem sistemul $\begin{cases} \alpha + \gamma & = 5, \\ \alpha + 3\beta - 2\gamma & = -7, \\ \alpha + \beta + 4\gamma & = 13, \end{cases}$ cu soluția unică $\alpha = 2.\ \beta = -1,\ \gamma = 3$. Deci $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2$, cu $\overrightarrow{w}_1 = 2\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2 = (2, -1, 1)$, $\overrightarrow{w}_2 = 3\overrightarrow{v}_1 = (3, -6, 12)$.

Exercițiul 9 *Fie* $V_1 = [\overrightarrow{a}_1 = (1, 2, 1, 1),\ \overrightarrow{a}_2 = (2, 3, 1, 0),\ \overrightarrow{a}_3 = (3, 1, 1, -2)]$,
$V_2 = \left[\overrightarrow{b}_1 = (0, 4, 1, 3),\ \overrightarrow{b}_2 = (1, 0, -2, -6),\ \overrightarrow{b}_3 = (1, 0, 3, 5)\right]$.
Determinați câte o bază în $V_1,\ V_2,\ V_1 + V_2,\ V_1 \cap V_2$.

Se procedează ca în exercițiul precedent pentru a determina câte o bază în V_1 și V_2. Obținem că $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$ este bază a lui V_1 și $\left\{\overrightarrow{b}_1,\ \overrightarrow{b}_2,\ \overrightarrow{b}_3\right\}$este bază a lui V_2. Deci $dimV_1 = dimV_2 = 3$.

Atunci $\left\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3,\ \overrightarrow{b}_1,\ \overrightarrow{b}_2,\ \overrightarrow{b}_3\right\}$ este sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Extragem din acesta baza $B_1 = \left\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3,\ \overrightarrow{b}_1\right\}$. Deci $dim\,(V_1 + V_2) = 4$.

Folosind teorema lui Grassmann deducem $dim\,(V_1 \cap V_2) = 3 + 3 - 4 = 2$, deci pentru a da o bază în $V_1 \cap V_2$ este suficient să găsim doi vectori liniar independenți din $V_1 \cap V_2$.

Vectorii $\overrightarrow{b}_2,\ \overrightarrow{b}_3$ aparțin sumei $V_1 + V_2$, deci putem determina coordonatele lor în baza B_1.

$$\overrightarrow{b}_2 = x^1\overrightarrow{a}_1 + x^2\overrightarrow{a}_2 + x^3\overrightarrow{a}_3 + x^4\overrightarrow{b}_1, \tag{3}$$
$$\overrightarrow{b}_3 = y^1\overrightarrow{a}_1 + y^2\overrightarrow{a}_2 + y^3\overrightarrow{a}_3 + y^4\overrightarrow{b}_1. \tag{4}$$

Deoarece $V_1, V_2 \underset{s.l}{\subset} \mathbb{R}^4$, deducem că $\overrightarrow{w}_1 = x^1\overrightarrow{a}_1 + x^2\overrightarrow{a}_2 + x^3\overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{b}_2 - x^4\overrightarrow{b}_1 \in V_1 \cap V_2$ și $\overrightarrow{w}_2 = y^1\overrightarrow{a}_1 + y^2\overrightarrow{a}_2 + y^3\overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{b}_3 - y^4\overrightarrow{b}_1 \in V_1 \cap V_2$.

Înlocuind vectorii în (3) și (4) obținem două sisteme compatibile unic determinate pe care le rezolvăm. E suficient să determinăm x^4, y^4 și obținem $\overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{b}_1,\ \overrightarrow{w}_2 = \overrightarrow{b}_2 + \overrightarrow{b}_3$. Se verifică liniara independență a vectorilor $\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2$, deci $B_2 = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$ este o bază în $V_1 \cap V_2$.

Observăm că $dim\,(\,V_1 + V_2) = 4 = dim\mathbb{R}^4$, deci $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$. Dar suma celor două subspații nu este directă, intersecția lor nefiind subspațiul liniar nul. Deci V_1 și V_2 nu sunt suplimentare.